О разложении на примарные множители целой трансцендентной функции.

Д. Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону).

§ 1.

Вейерштрассово разложение целой функции $G(z)$ на примарные множители дает

$$G(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n(z)}, \tag{1}$$

где $g(z)$ — полином или целая трансцендентная функция, a_n — нули $G(z)$, расположенные по модулям в возрастающем порядке, так что

$$|a_n| \leqslant |a_{n+1}|;$$

при этом в общем случае можно взять

$$Q_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)a_n^{n-1}}. \tag{2}$$

В том случае, когда ряд

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\omega+1}} \tag{3}$$

при некотором постоянном целом положительном ω сходится, вместо значения (2) для Q_n можно взять полином *постоянной* степени

$$Q_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^\omega}{\omega a_n^\omega}. \tag{4}$$

Когда $g(z)$ — полином, то наибольшее из чисел ω и γ [степень $g(z)$] Борель называет родом (*genre*) целой трансцендентной функции $G(z)$.

Можно этот результат представить в следующей *суженной* форме:

Так как условие

$$\sqrt[k]{n} < |a_n|, \tag{5}$$

начиная с некоторого n, влечет за собой сходимость $\sum \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$, так как $\sum \frac{1}{n^{\frac{k+1}{k}}}$ сходится, то можно сказать, что степень $G_n(z)$, которую означим через ν, при условии (5) равна k

$$\nu = k. \tag{6}$$

Борель указывает, что в общем случае можно принять

$$\nu = E(\lg n - 1), \tag{7}$$

даже более того:

$$\nu = E\left(\frac{2\lg n}{\lg |a_n|} - 1\right). \tag{7'}$$

Я покажу, что, в зависимости от быстроты возрастания $|a_n|$ вместе с n, можно в зависимости от неравенств, аналогичных (5), получить значения для ν.

§ 2.

Доказательство формулы Вейерштрасса ведется так:

1) доказывается сходимость

$$G_1(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n(z)};$$

2) доказывается, что отношение

$$\frac{G(z)}{G_1(z)\cdot z^p}$$

представляет голоморфную функцию, не имеющую на плоскости ни полюсов, ни нулей, а потому сводящуюся к $e^{g(z)}$.

При доказательстве первой части, в которой и определяется степень $Q_n(z)$, $G(z)$ разлагается на множители

$$F(z) = \prod_{n=1}^{n=q}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n(z)}$$

и

$$F_1(z) = \prod_{n=q+1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n(z)}$$

и доказывается, что при всяком R можно взять q достаточно большим, чтобы $F_1(z)$ было сходящимся в круге радиуса R.

Для этого q выбирается так, что при

$$n \geqq q+1 \quad |a_n| > \frac{R}{\alpha}, \text{ где } \alpha < 1.$$

На основании известного условия сходимости бесконечного произведения дело сводится к доказательству сходимости

$$\sum u_n = \sum\left[e^{-\frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu+2} - \cdots} - 1\right].$$

Неравенство

$$|e^m - 1| < e^{|m|} - 1$$

дает

$$|u_n| < e^{\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\cdot\frac{1}{1-\alpha}} - 1,$$

а неравенство

$$e^{|m|} - 1 < |m| e^{|m|}$$

$$|u_n| < \frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\frac{1}{1-\alpha}\, e^{\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\frac{1}{1-\alpha}} < \frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}, \tag{8}$$

откуда, в силу сходимости $\sum \left|\frac{R}{a_n}\right|^{\nu+1}$, так как

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{R}{a_n}\right|^{n+1}} = \overline{\lim} \left|\frac{R}{a_n}\right| < \alpha < 1,$$

можно видеть

$$\nu = n.$$

§ 3.

Полагая $\nu + 1 = \xi(n)$, придадим

$$\Omega(n) = \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}$$

форму

$$e^{\xi(n) \cdot \lg \left|\frac{z}{a_n}\right|}$$

и, затем, положим

$$\xi(n) = \frac{C \cdot \lg \vartheta(n)}{\lg \psi(a_n)}.$$

Тогда

$$\Omega(n) = [\vartheta(n)]^{\frac{C \lg \left|\frac{z}{a_n}\right|}{\lg \psi(a_n)}}. \tag{9}$$

Полагая $C = 2$, $\vartheta(n) = n$, $\psi(a_n) = |a_n|$ и замечая, что

$$\left|\frac{z}{a_n}\right| < \left|\frac{R}{a_n}\right|,$$

будем иметь

$$\Omega(n) \leqslant n^{-\frac{\lg \left|\frac{a_n}{R}\right|^2}{\lg |a_n|}}.$$

Мы можем утверждать сходимость

$$\sum \left|u_n\right| \leqslant \sum \frac{1}{\nu+1} \Omega(n) \leqslant \sum \Omega(n),$$

сравнивая его с сходящимся рядом $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, если, начиная с некоторого значения n, показать, что

$$\frac{\lg \left|\frac{a_n}{R}\right|^2}{\lg |a_n|} > \frac{3}{2}.$$

Но это и имеет место в действительности, так как можно n выбрать всегда таким, что $\sqrt[4]{|a_n|} > R$, а из последнего неравенства выводится, что

$$\frac{\lg \left|\frac{a_n}{R}\right|^2}{\lg |a_n|} > \frac{3}{2}.$$

Таким образом получаем, что условие сходимости соблюдено для значений ν, удовлетворяющих неравенству

$$\nu+1 \geqslant \frac{2 \lg n}{\lg |a_n|}. \tag{10}$$

Наименьшее же значение ν, удовлетворяющее этому неравенству, будет указанное Борелем (7).

§ 4.

Но возьмем $\vartheta(n)=n^{\frac{1}{2}\lg n}$. Можно доказать, что ряд

$$\sum [\vartheta(n)]^{-s} \tag{11}$$

сходится при $s=2$.

Из неравенств

$$\frac{1}{n+1} < -\lg\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

вытекает, что

$$\frac{\lg(n+1)}{\lg n} = 1+\frac{\theta_n}{n\cdot\lg n} \qquad 0<\theta<1,\ \lim\theta_n=1$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\theta_n}{n\cdot\lg n}\right)^2 =$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2\theta_n}{n\cdot\lg n}+\frac{\theta_n^2}{n^2\lg^2 n}\right),$$

откуда

$$\lim n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right] = \lim\left[1+\frac{2\theta_n}{\lg n}+\dots\right]=1$$

$$\lim\left\{n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right]-1\right\}\lg n = 2\lim\theta_n = 2>1,$$

откуда и вытекает сходимость ряда (11).

Полагая теперь в неравенстве

$$\frac{C\lg\left|\frac{a_n}{R}\right|}{\lg\psi(a_n)} > s$$

или

$$\frac{|a_n|}{\psi(a_n)^{\frac{s}{C}}} > R, \tag{12}$$

при котором имеет место сходимость ряда (9), $\psi(a_n)=|a_n|$, $C=3$, получаем:

$$\nu+1 \geqslant \frac{\frac{3}{2}\lg n+3\lg(\lg n)}{\lg|a_n|},$$

и наименьшее ν будет

$$\nu = E\left[\frac{\frac{3}{2}\lg n+3\lg(\lg n)}{\lg|a_n|}-1\right] \tag{13}$$

ниже Борелевского (7).

§ 5.

Полагая общée

$$\xi(n)=\frac{\pi(n)\cdot\lg\vartheta(n)}{\lg\psi(a_n)},$$

где $\pi(n)>1$, но при этом $\lim\pi(n)=1$, при $\vartheta(n)=n$ мы выводим достаточные условия сходимости $\Sigma\,\Omega(n)$ и $\Sigma\,|u_n|$

$$\lg|a_n|^{\pi(n)}-\lg R^{\pi(n)}>\lg\psi\,|a_n|$$

$$\frac{|a_n|}{\psi\,|a_n|^{\frac{1}{\pi(n)}}}>R. \tag{14}$$

Если $\psi\,|a_n|=|a_n|$, то

$$|a_n|^{1-\frac{1}{\pi(n)}}>R. \tag{15}$$

Это неравенство при достаточно больших n будет выполнено, если

$$\varphi(n)=\frac{\pi(n)-1}{\pi(n)},$$

имея своим пределом нуль, вместе с тем таково, что

$$\lim|a_n|^{\varphi(n)}=\infty.$$

Прежде всего, полагая

$$\sqrt[k]{n}<|a_n|,$$

замечаем, что можно взять

$$\varphi(n)=\frac{1}{\sqrt[k]{\lg n}},\quad k>1$$

что дает

$$|a_n|^{\varphi(n)}>n^{\frac{1}{\sqrt[k]{\lg n}}}.$$

Но при

$$\eta=n^{\frac{1}{\sqrt[k]{\lg n}}}$$

$$\lg\eta=\frac{1}{\sqrt[k]{\lg n}}\lg n=\sqrt[k]{(\lg n)^{k-1}}$$

$$\lim_{n=\infty}\lg\eta=\infty,\quad \eta=\infty,$$

так что можно взять

$$\nu+1\geqq k\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{\lg n}}\right)^{-1}.$$

Наименьшее значение

$$\nu=E\left(\frac{k}{1-\frac{1}{\sqrt[k]{\lg n}}}\right)-1. \tag{16}$$

Далее, при условии

$$\sqrt[k]{\lg n}<|a_n|$$

можно взять

$$\varphi(n)=\frac{1}{\sqrt[k]{\lg(\lg n)}},$$

ибо

$$\lim_{n=\infty}[\lg n]^{\frac{1}{\sqrt[k]{\lg(\lg n)}}}=\infty.$$

Вследствие чего должны взять

$$\nu+1\geqslant\frac{\lg n}{\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{\lg(\lg n)}}\right)^{\lg(\lg n)}}$$

и вместо формулы (16) взять

$$\nu=E\left[\frac{k\cdot\lg n}{\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{\lg(\lg n)}}\right)^{\lg(\lg n)}}\right]-1. \tag{17}$$

Такие же формулы получаем и при

$$\sqrt[k]{\lg(\lg n)}<|a_n|$$

$$\sqrt[k]{\lg[\lg(\lg n)]}<|a_n|$$

и т. д.

Sur la décomposition en facteurs premiers de la fonction transcendente entière.

Par M. **D. Mordouhay-Boltovskoy** (Rostoff-sur-Don).

(Résumé.)

Dans la formule de Weierstrass

$$G(z)=e^{g(z)}z^{\nu}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{Q_n(z)}$$

on peut indiquer pour ν [degré du polynome $Q_n(z)$] pour n suffisamment grand les formules suivantes:

pour

$$\sqrt[k]{n}<|a_n| \qquad \nu=E\left(\frac{k}{1-\frac{1}{\sqrt[k]{\lg n}}}\right)-1 \qquad (k>1)$$

$$\sqrt[k]{\lg n}<|a_n| \quad \nu=E\left[\frac{k\lg n}{\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{\lg(\lg n)}}\right)^{\lg(\lg n)}}\right]-1 \quad (k>1)$$

et les formules analogues pour

$$\sqrt[k]{\lg(\lg n)}<|a_n|,\quad \sqrt[k]{\lg[\lg(\lg n)]}<|a_n|$$

etc.
